Aljoscha Jegodtka

Individualisierte Diagnostik

Das revidierte klinische Interview und die Zone der nächsten Entwicklung in der Diagnostik von Schwierigkeiten im basalen mathematischen Bereich

Berlin 2016

ICHS
International Cultural-historical Human Sciences
ist eine Schriftenreihe, die der kulturhistorischen Tradition verpflichtet ist – das ist jene, vor allem von Lev S. Vygotskij, Aleksej N. Leont'ev und Aleksandr R. Lurija entwickelte theoretische Konzeption, die den Menschen und seine Entwicklung konsequent im Kontext der Kultur und der gesellschaftlich historischen Determination betrachtet. Dabei kommt der Tätigkeit als der grundlegenden Form der Mensch-Welt-Wechselwirkung für die Analyse der menschlichen Entwicklung und Lebensweise entscheidende Bedeutung zu, sowohl unter einzelwissenschaftlichen Aspekten und deren Synthese zu übergreifender theoretischer Sicht als auch im Hinblick auf praktische Problemlösungen. Die Schriftenreihe veröffentlicht sowohl Texte der Begründer dieses Ansatzes als auch neuere Arbeiten, die für die Lösung aktueller wissenschaftlicher und praktischer Probleme bedeutsam sind.

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Informationen sind im Internet unter: **<http://dnb.ddb.de>** abrufbar.

Aljoscha Jegodtka
Individualisierte Diagnostik

www.lehmanns.de • www.ich-sciences.de

ISBN: 978-3-86541-835-7

Druck: docupoint GmbH • Barleben

Inhaltverzeichnis

Vorwort

Das Themenspektrum der Dissertation von Aljoscha Jegodtka reicht von der kritischen Würdigung eines etablierten neuropsychologischen Ansatzes zur Diagnostik und Erklärung von Rechenschwächen, über die Erarbeitung und Erprobung einer förderdiagnostischen Methodologie bis zur differenzierten Darstellung und Erörterung des kulturhistorischen Ansatzes, wie er von Vygotskij entwickelt und zurzeit im Rahmen „sozialkonstuktivistischer" Diskussionen der Pädagogik meist eine nur wohlwollend oberflächliche Erwähnung findet.

Es sind vor allem die ausführliche Rezeption und Entfaltung dieses – viel versprechenden – theoretischen Ansatzes, die die Dissertation von Aljoscha Jegodtka anspruchsvoll und zugleich lesenswert machen. Hervorzuheben ist, dass nicht nur der aktuelle wissenschaftliche Stand der Diskussion um die kulturhistorische Schule berücksichtigt, sondern dass dieser theoretische Ansatz auch – man ist geneigt zu sagen in Form einer „Grounded Theory" – in der Auseinandersetzung mit einem konkreten empirischen Gegenstand weiterentwickelt wird. Es werden die empirischen Schritte einschließlich der dabei auftretenden Hindernisse geschildert, für die Diagnostik von basalen Rechenschwächen in der Schuleingangsstufe Vygotskijs Entwicklungstheorie und vor allem dessen Konzept der „Zone der nächsten Entwicklung" zu adaptieren. Die Dissertation verwendet im Titel in aller Bescheidenheit den Terminus „Diagnostik". Gerade durch die Auseinandersetzung mit den Konzepten Vygotskijs gelingt es jedoch (zumindest als weiterführende Heuristik), mit dem vorgestellten diagnostischen Verfahren bei basalen Rechenschwächen diagnostische und therapeutische Prozesse zu integrieren, wofür der Terminus „Förderdiagnostik" zwar herkömmlicherweise verwendet wird, im Grunde aber ein zu schwacher Begriff ist.

Die dargestellten Fallvignetten der in der empirischen Studie untersuchten 25 Kinder verdeutlichen, wie unterschiedlich bei mathematischen Basisoperationen kulturelle Artefakte bzw. Anforderungen und über idiosynkratische Lernbiografien erworbene Kompetenzen in Konflikt zueinander geraten können. Mittelbar zeigt sich darin auch, wie flexibel und fachkompetent Pädagogen/Pädagoginnen darauf vorbereitet sein sollten, um über globale diagnostische Labels von „Dyskalkulie" hinaus zu gelangen und gezielte pädagogische Hypothesen für den individuellen Fall zu erreichen. Wie in der Dissertation durch den akribischen Vergleich der Ergebnisse standardisierter und individualisierter („qualitativer") diagnostischer Verfahrensweisen bei denselben Kindern des Weiteren überdeutlich wird, kann ein allzu großes Vertrauen in standardisierte Testverfahren kontraproduktiv sein. Die Ergebnisse von Tests können dazu verleiten, zugrunde liegende fehlerhafte Aneignungsprozesse mathematischer Kompetenzen zu verkennen und in der Konsequenz unzureichende pädagogische Förderstrategien zu begünstigen. In diesem Punkt setzt die Dissertation implizit Maßstäbe, die sich als eine veritable Herausforderung für eine Didaktik der Schuleingangsstufe bzw. für die dazu gehörige Lehramtsausbildung erweisen.

Besonders bemerkenswert erscheint mir, dass die akribische empirische Beschäftigung mit diesen individuellen kindlichen Aneignungsprozessen dazu zwingt, Konzepte der kulturhistorischen Schule, etwa das der dominierenden Tätigkeit und der Zone nächster Entwicklung zu überdenken und neu zu justieren. Offenbar ist das entwicklungstheoretische Konzept der Zone nächster Entwicklung bei individuellen Aneignungsvorgängen kultureller Artefakte zu differenzieren, könnten oder sollten dabei objektive und subjektive Zonen der nächsten Entwicklung unterschieden werden. Darüber hinaus ist es offenbar ratsam, im Plural von „subjektiven Zonen der nächsten Entwicklung“ zu sprechen, um die Individualität der kindlicher Aneignung mit dem sich stets andeutenden nächsten qualitativen Entwicklungsfortschritt konzeptionell zu verbinden, also in den und trotz der Eigenheiten individueller Entwicklungen allgemeine Entwicklungsgesetzmäßigkeiten zu identifizieren.

Aljoscha Jegodtka verwendet das durch kulturhistorische Überlegungen erweiterte „revidierte klinische Interview“ sensu Piaget, um die Diagnostik basaler mathematischer Operationen des Kindes und speziell dessen Zone nächster Entwicklung eruieren und umschreiben zu können. Die methodische Modifikation dieser Interviewform besteht darin, über gezielte, nicht-suggestive Interventionen im diagnostischen Interview Hinweise auf vorerst nur im kooperativen Setting artikulierbare, noch ungesicherte Fertigkeiten des Kindes zu erhalten oder auch ungesicherte Fertigkeiten durch Irritation zwar antrainierter, jedoch unzureichender mathematischer Lösungsstrategien zu entdecken. Eine originelle Pointe dieses Vorgehens besteht im Übrigen nicht allein in der Gewinnung von Hinweisen auf die Zone der nächsten Entwicklung, sondern auch in der detailreichen Beschreibung der aktuellen Kompetenzen des Kindes in Hinblick auf mathematische Anforderungen, ohne die für die jeweiligen Aufgabenstellungen noch nicht voll entwickelten Operationen lediglich als „Fehler“ des Kindes abzuqualifizieren. Im derartig detailreich festgestellten erreichten Entwicklungsstand können bereits mögliche Entwicklungsfortschritte hypothetisch ausgemacht und für das pädagogisch-therapeutische Vorgehen genutzt werden.

Dass der mit der Dissertation verfolgte höchst anspruchsvolle Forschungsansatz zahlreiche ergänzende und weiterführende Forschungsfragen aufwirft, ist selbstverständlich. Ich verweise nur auf zwei mögliche Fragestellungen. Durch Längsschnitt- bzw. Evaluationsstudien könnten die von Aljoscha Jegodtka im Querschnittdesign gewonnenen Ergebnisse zur Identifikation von Zonen der nächsten Entwicklung überprüft und vertieft sowie die Rolle anderer Faktoren (etwa motivationaler Faktoren, von Retrieval-Prozesse bei prozeduralen Wissensbeständen) bei der Lösung grundlegender mathematischer Operationen mitberücksichtigt werden. Mindestens ebenso interessant wäre die weitere, durch Empirie gestützte Aufarbeitung und Vertiefung der Theorie der kulturhistorischen Schule, mit der sich der meines Erachtens gegenwärtig zu konstatierende theoretische Stillstand in der Entwicklungspsychologie beenden lassen könnte.

Paul Walter

1. Einleitung

Die diagnostische Erfassung mathematischer Fertigkeiten als Bedingung der Förderung von Kindern mit Schwierigkeiten im basalen mathematischen Bereich[1] stellt in der pädagogischen Praxis eine große Herausforderung dar und erfordert fachliche und fachdidaktische Kenntnisse. Anforderungen an diagnostische Verfahren werden aktuell vertiefend diskutiert (z. B. Moser Opitz 2009), jedoch liegen nur wenige ausgereifte nichtstandardisierte diagnostische Verfahren vor. Dies gilt insbesondere dann, wenn sowohl die mathematischen Fertigkeiten eines Kindes umfassend beschrieben als auch eine adäquate Förderung ermöglicht werden soll. Eine theoretische Absicherung der existenten Verfahren nimmt zwar aktuell zu, diese werden allerdings bislang nur mit Einschränkungen den komplexen Anforderungen gerecht. Diese Anforderungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Diagnostik soll Kinder mit Schwierigkeiten im basalen mathematischen Bereich identifizieren.
- Die Diagnostik soll den Ausgangspunkt einer Förderung ermitteln.
- Diagnostische Verfahren sollen theoriegeleitet sein.
- Die Diagnostik soll Testgütekriterien qualitativer Tests entsprechen.

Diagnostische Verfahren basieren immer, ob explizit formuliert oder implizit unterstellt, auf Theorien über die kindliche Entwicklung mathematischer Fertigkeiten und über abweichende Prozesse, die den Erwerb dieser Fertigkeiten stören. Zugleich stehen diese Verfahren in einem engen Zusammenhang zu den mathematischen Inhalten, die Kinder lernen sollen. Im *zweiten Kapitel* werden ausgewählte Kernbereiche des *mathematischen Anfangsunterrichts* zusammenfassend dargestellt; die Darstellung beschränkt sich auf Aspekte der *Schulein-*

1 In der sonderpädagogischen und mathematikdidaktischen Forschung werden die Begriffe Rechenschwäche, Rechenstörung und Dyskalkulie verwendet, wobei ein deutlicher Schwerpunkt auf der Benutzung des Wortes Rechenschwäche liegt (zur Kritik an diesem Begriff vgl. Schipper 2001). Anschließend an Meyerhöfers (2008, 2010, 2011) Kritik an den impliziten Pathologisierungstendenzen aller bisher benutzten Begriffe zur Umschreibung der Phänomene wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit in der Regel von Schwierigkeiten im basalen mathematischen Bereich gesprochen. Ausnahmen werden dann gemacht, wenn die rezipierten Autoren und/oder Theorierichtungen dezidiert alternative Begrifflichkeiten einführen. Dies ist insbesondere bei der Theorie Michael von Asters (1996, 2003, 2006, 2009) der Fall, der von ‚Dyskalkulie‘ und ‚dyskalkulischen Kindern‘ spricht.

gangsstufe[2]. Ein Überblick über unterschiedliche Theorien zur Erklärung der Entwicklung mathematischer Fertigkeiten bei Kindern wird im *dritten Kapitel* gegeben. Denn „nur wenn bekannt ist, wie sich eine bestimmte Kompetenz entwickelt und wie ein Lerninhalt aufgebaut ist, können gezielte Fördermaßnahmen geplant werden" (Scherer / Moser Opitz 2010: 39). Es wird dabei aufgezeigt, weshalb eine nähere Auseinandersetzung mit der neuropsychologischen Theorie Michael von Asters und der Theorie der kulturhistorischen Schule unter besonderer Beachtung der Diagnostik mathematischer Fertigkeiten zweckmäßig ist.

Das *vierte Kapitel* setzt sich mit einer neuropsychologischen Theorie der Entwicklung mathematischer Fertigkeiten sowie ihrer diagnostischen Operationalisierung auseinander. Im deutschsprachigen Raum wird die an Dehane (1992, 1997, 1999) angelehnte neuropsychologische Theorie der Entwicklung mathematischer Fertigkeiten – das ‚Triple-Code Modell' – prominent durch *Michael von Aster* (1996, 2003, 2005, 2009) vertreten. Das von ihm entwickelte Testverfahren, die *„neuropsychologische Testbatterie zur Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern – Zareki-R"* (von Aster / Weinhold Zulauf / Horn 2006a, b, c)[3] kann als diagnostische Operationalisierung seines Ansatzes verstanden werden und stellt ein weit verbreitetes Instrument zur Diagnostik von Dyskalkulie dar.

Das ‚Triple-Code Modell' wird im deutschsprachigen Raum von einigen Forscherinnen und Forschern als wichtiger Erklärungsansatz der Entwicklung mathematischer Fertigkeiten betrachtet, von einem anderen Teil hingegen kaum bis gar nicht beachtet. Zwar liegen einige kritische Stellungnahmen vor (Moser Opitz 2007: 49, Gaidoschik 2010: 140-151), eine umfassende Auseinandersetzung mit diesem Modell fand bisher jedoch nicht statt.

Die Zareki-R hat verhältnismäßig weite Verbreitung gefunden und wird insbesondere in schulischen und kinderpsychiatrischen Zusammenhängen eingesetzt. Die Zareki-R wird zum Teil kritisiert (z. B. Schipper 2005), eine intensive Auseinandersetzung mit den theoretischen Hintergründen dieses Testverfahren, wie z. B. dem ‚Triple-Code Modell' findet bisher jedoch kaum statt.

Im *vierten Kapitel* sollen demnach vorliegenden Lücken der Rezeption ge-

2 Mit Schuleingangsstufe bzw. Schuleingangsphase werden die bisherigen Klassen 1 und 2 der Grundschule bezeichnet. Diese werden in einigen Schulen jahrgangsübergreifend unterrichtet, und der Verbleib in der Schuleingangsstufe kann zwischen ein und drei Schuljahre andauern, bis das Kind in die 3. Klasse wechselt.

3 Dieses Autorentrio, welches die Zareki bzw. die Zareki-R publiziert hat, wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit häufig als von Aster et al. bezeichnet.

schlossen werden. Hierfür wird zunächst von Asters neuropsychologische Theorie der Entwicklung mathematischer Fertigkeiten bei Kindern skizziert (Kapitel 4.1). Es schließt sich eine Darstellung von Asters grundlegender Annahmen zum Entstehen von Dyskalkulie an (Kapitel 4.2). Hieran anknüpfend wird die diagnostische Operationalisierung dieses Ansatzes in der Zareki-R skizziert (Kapitel 4.3) und die Konsequenzen für die Förderung dyskalkulischer Kinder aufgezeigt (Kapitel 4.4). Abschließend werden die Konsequenzen für diese Arbeit diskutiert (Kapitel 4.5).

Im *empirischen Abschnitt* dieser Arbeit wird die Zareki-R unter den Gesichtspunkten der zutreffenden Identifikation betroffener Kinder und der Bestimmung des Ausgangspunkts der Förderung untersucht (Kapitel 8). Dabei wird zunächst geprüft, inwiefern die Zareki-R gemäß ihrer eigenen sowie externer Kriterien dyskalkulische Kinder zutreffend ermittelt (Kapitel 8.1). Anschließend wird analysiert, inwiefern die Diagnosestellungen der Zareki-R hilfreich für die Ermittlung des Ausgangspunkts einer kindangemessenen Förderung sind (Kapitel 8.2). Die Diagnostik der Zareki-R wird in beiden Fällen kontrastiv mit Ergebnissen informeller Interviews verglichen. Die Forschungsmethoden werden in *Kapitel 6* dargestellt. Ein Überblick über die empirischen Ergebnisse findet sich in *Kapitel 7.*

Die an *Lev Semënovič Vygotskij*[4] orientierte *kulturhistorische Schule* der kindlichen Entwicklung ist zwar im englischsprachigen Raum weit verbreitet, wird aber in Deutschland kaum rezipiert. Einzig ausgewählte Momente dieser Theorie wie z. B. das Konzept der ‚Zone der nächsten Entwicklung' haben im deutschsprachigen Raum bislang Verwendung gefunden. Dieser theoretische Ansatz wird im *fünften Kapitel* umfassend dargestellt, wobei ein erster Versuch unternommen wird, die Ergebnisse der kulturhistorischen Schule unter dem Gesichtspunkt der Entwicklung mathematischer Fertigkeiten zu interpretieren. Da bislang nur wenige kulturhistorisch orientierte Arbeiten zur Genese mathematischer Fertigkeiten bei Kindern vorliegen, stellt dies eine Erweiterung dieses Ansatzes dar.

Zur Einordnung wird zunächst die Entwicklung der kulturhistorischen Schule kurz dargestellt (Kapitel 5.1). Die Entwicklung psychischer Funktionen

4 Es gibt drei mögliche Arten, den Namen Vygotskijs zu schreiben: Vygotskij, Wygotski und Vygotsky, wobei die letzte Schreibweise in der englischsprachigen Literatur genutzt wird. Im Rahmen dieser Arbeit wird Vygotskij genutzt, es sei denn zitierte Autoren favorisieren eine andere Schreibweise.

bei Kindern wird dabei als sozial vermittelter Prozess der Interiorisierung verstanden (Kapitel 5.2), der in der Abfolge von kritischen Phasen und stabilen Altersstufen (Kapitel 5.3) auf unterschiedlichen Ebenen stattfindet. In den Altersstufen dominieren spezifische Tätigkeiten, die mit unterschiedlichen Formen der Interiorisierung verbunden sind (Kapitel 5.4). Das Verhältnis von Sprache und Begriffsbildung wird in Kapitel 5.5 dargestellt. Stärkere Verbreitung fand das Konzept der Zonen der nächsten Entwicklung, welches anschließend in seinen unterschiedlichen Facetten dargestellt wird, wobei eine Differenzierung zwischen subjektiven und objektiven Zonen vorgenommen wird (Kapitel 5.6). Eine Auseinandersetzung mit Kritik an diesem Konzept und die Darstellung der in dieser Arbeit genutzten Interpretation der Zonen der nächsten Entwicklung findet ebenfalls dort statt.

Diagnostische Methoden und Verfahren, die auch Zonen der nächsten Entwicklung erfassen, sind bislang nicht weit verbreitet. Dies hängt u.a. damit zusammen, dass von Vygotskij kaum ausgearbeitete konzeptionelle Überlegungen zum Problem der Diagnostik und keine Anwendungen auf den mathematischen Bereich vorliegen. Eine Möglichkeit soll durch die vorliegende Arbeit entwickelt werden. In Kapitel 5.7 werden daher zunächst die Implikationen der kulturhistorischen Schule für die Erfassung von Schwierigkeiten im basalen mathematischen Bereich entwickelt. Die Auseinandersetzung mit vorliegenden diagnostischen Verfahren untersucht, inwiefern das Konzept der Zone der nächsten Entwicklung in diese integriert wurde. Eine Interpretation des Piaget'schen revidierten klinischen Interviews aus kulturhistorischer Perspektive zeigt dabei eine diagnostische Möglichkeit auf. Zusammenfassend werden die Konsequenzen für diese Arbeit unter dem Gesichtspunkt der Diagnostik des aktuellen Standes der Begriffsbildung, der Diagnostik subjektiver Zonen der nächsten Entwicklung und der Methodologie des revidierten klinischen Interviews diskutiert.

Im *empirischen Abschnitt* dieser Arbeit wird untersucht, welchen Beitrag die Diagnostik mit einem kulturhistorisch interpretierten revidierten klinischen Interview zur Identifikation betroffener Kinder leisten kann (Kapitel 9.1). Inwiefern diese diagnostische Methode und die Ermittlung subjektiver Zonen der nächsten Entwicklung wichtig für die Ermittlung eines Ausgangspunkts der Förderung betroffener Kinder sein können, ist Thema des Kapitels 9.2. Die Diagnostik subjektiver Zonen der nächsten Entwicklung wird darüber hinaus als gesondertes Thema der Erkenntnis über den Stand der Begriffsbildung thematisiert (Kapitel 9.3). Die Forschungsfragen und die Forschungsmethoden werden dabei in *Kapitel 6* dargestellt. Ein Überblick über die Ergebnisse findet sich in *Kapitel 7.*

Ein expliziter Vergleich der Diagnosen – zwischen Zareki-R und kulturhistorisch orientierter Diagnostik – ist Thema des *zehnten Kapitels*. Im *elften Kapitel* schließt sich eine zusammenfassende Darstellung der *Forschungsergebnisse* dieser Arbeit an, wobei *Forschungsdesiderate* aufgezeigt werden. Dabei werden die Resultate bezüglich der Zareki-R (Kapitel 11.1) sowie der kulturhistorisch orientierten Diagnostik (Kapitel 11.2) resümiert. Als Ausblick für die pädagogische Arbeit wird die Notwendigkeit einer Individualisierung diagnostischer Prozesse (Kapitel 11.3) festgehalten.

2. Ausgewählte mathematische Inhalte der Schuleingangsstufe

Der Erwerb basaler arithmetischer Fertigkeiten ist wesentliches Ziel der Schuleingangsstufe wie auch eine grundlegende Notwendigkeit für den weiteren Schulerfolg und die Bewältigung des weiteren Lebens, in dem regelmäßig arithmetische Fertigkeiten nötig sind. Die basalen mathematischen Themenbereiche der Schuleingangsstufe stellen einerseits die Lernziele im mathematischen Bereich dar, die Kinder am Ende der Schuleingangsstufe erlernt haben sollen. Andererseits bilden sie die Grundlage, auf der die weiteren mathematischen Themenbereiche der folgenden Schuljahre aufbauen. Es besteht somit die Notwendigkeit, jedem Kind diese basalen mathematischen Inhalte zu vermitteln, damit es kognitiv adäquat in der Lage ist, den aufbauenden Themen zu folgen.

Die Inhalte des Mathematikunterrichts der Schuleingangsstufe bzw. der Klassen eins und zwei lassen sich in Anlehnung an Darstellungen der Mathematikdidaktik (z. B. Padberg 1996, 2005, Radatz / Schipper 1983, Krauthausen / Scherer 2007 und Scherer / Moser Opitz 2010: 101-156) sowie anhand von Lehrplänen[5] sehr verdichtet darstellen.

Notwendige Wissensinhalte am Ende der Schuleingangsstufe	
Ordinalzahl:	- der Unterschied zwischen Ordinal- und Kardinalzahl
Kardinalzahl:	- die Bedeutung der Zahl als Antwort auf die Frage „Wie viele?“ - das Verhältnis von (Kardinal-)Zahl und Ziffer - das Teil-Teil-Ganze-Schema[6] von Kardinalzahlen - die Eins als Basisgröße natürlicher Zahlen kennen und jede weitere natürliche Zahl als Vielfaches der Eins verstehen
Relationalzahl:	- die Vergleichbarkeit von Zahlen nach ihrer Mächtigkeit

5 Einbezogen wurde der gemeinsame Lehrplan der Bundesländer Berlin, Brandenburg, Bremen und Mecklenburg-Vorpommern (Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg / Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin / Senator für Bildung und Wissenschaft Bremen / Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern 2004), der Lehrplan des Landes Schleswig-Holstein (Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein 1997 und 2004); siehe auch die Darstellung des Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2008).

6 Mit dem Teil-Teil-Ganze-Schema wird bezeichnet, dass Mengen aus Teilen bestehen; so wird beispielsweise ein statisches additives Verhältnis ausgedrückt: zwei Äpfel und drei Birnen bilden die Gesamtmenge von fünf Stücken Obst.

Notwendige Wissensinhalte am Ende der Schuleingangsstufe	
Zahlzerlegung:	- die Zerlegung aller Zahlen von 0 bis 10
Stellenwert-system:	- die Bedeutung der Bündelung auf der Basis 10 - das Teil-Teil-Ganze-Schema des Stellenwertsystems - die Sprech- und Schreibweise zweistelliger Zahlen
Addition:	- die Bedeutung als Vereinigung zweier Teilmengen zu einer Gesamtmenge - Gleichungsverständnis der Addition - die verschiedenen Additionswege und ihre Bedeutungen
Subtraktion:	- die Subtraktion als Herauslösen einer Teilmenge aus einer Gesamtmenge - die Bedeutung der Schreibweise der Subtraktion - die verschiedenen Subtraktionswege und ihre Bedeutungen
Multiplikation:	- die Bedeutung der Multiplikation als Kurzschreibweise für die fortgesetzte Addition gleicher Summanden - Automatisierung der Kernaufgaben des kleinen 1x1 - die Ableitung weiterer Aufgaben aus diesen Kernaufgaben
Division:	- Erste Grunderfahrungen des Aufteilens - Zusammenhang zur Multiplikation

Tabelle 1: Mindestfertigkeiten am Ende der Schuleingangsstufe; eigene Zusammenstellung

Die Forschung zu Schwierigkeiten im Erwerb basaler mathematischer Fertigkeiten (z. B. Gerster 2009) bzw. nicht bewältigten stofflichen Hürden (Meyerhöfer 2008, 2010 und 2011) hat gezeigt, dass es inhaltliche Kernbereiche gibt, die für das kindliche Lernen eine besondere Herausforderung darstellen. Diese Kernbereiche umfassen

- den kardinalen Zahlbegriff,
- den relationalen Zahlbegriff,
- das dekadische Stellenwertsystem und
- das Operationsverständnis.

Im Folgenden werden die Zahlbegriffe, das dekadische Stellenwertsystem sowie das Operationsverständnis der Addition in ihren wesentlichen Momenten dargestellt. Daraus kann auf Aspekte geschlossen werden, die diagnostisch erfasst werden sollten, um das jeweilige Fertigkeitsniveau eines Kindes adäquat abzubilden.

2.1 Die Zahlbegriffe

Die Entwicklung eines angemessenen und umfassenden Zahlbegriffs stellt eine wesentliche Anforderung an den mathematischen Anfangsunterricht dar. Kinder mit Schwierigkeiten im basalen mathematischen Bereich haben häufig keinen adäquaten Zahlbegriff entwickelt (Meyerhöfer 2009, 2010, 2011), sondern bleiben in einem ordinalen Zahlverständnis verhaftet und partizipieren auf dieser Basis am Schulunterricht. Die Zahlbegriffe werden im Folgenden skizziert, um anschließend Folgerungen für Mindestfertigkeiten am Ende der Schuleingangsstufe darstellen und diagnostische Konsequenzen ziehen zu können.

Den *ordinale Zahlbegriff* kennzeichnet, dass die Zahlen der Zahlwortreihe einen Rangplatz haben, und mit der Nennung der Zahlwortreihe eine Zahlenfolge gekennzeichnet wird, bei der beispielsweise die Zahl drei das dritte gezählte Element kennzeichnet. In der mathematikdidaktischen Diskussion wird diesem Thema in der Regel keine besondere Beachtung geschenkt[7], auch wenn es in Schulbüchern der ersten Klasse durchaus behandelt wird. Dies kann seinen Grund darin haben, dass der Ordinalzahlbegriff für den rechnenden Umgang mit Zahlen irrelevant ist und davon ausgegangen wird, dass er beim Kind bereits vor Beginn des Schulunterrichts angemessen ausgeprägt ist. Relevant ist dabei, dass der Unterschied zwischen Ordinalzahl- und Kardinalzahlbegriff dem Kind bekannt sein muss. Hierbei gibt es u.a. das Problem, dass „in unserer Sprache Zahlwörter wie eins, zwei, drei, usw. in doppelter Bedeutung verwendet werden. In allen indogermanischen Sprachen bezeichnen die Zahlwörter eins, zwei, drei,... den *ordinalen* Aspekt (Rangplatz in der Serie der Zahlwörter) und den *kardinalen* Aspekt (Anzahl der bis dahin gezählten Dinge). Die meisten Kinder schaffen diese Einsicht der doppelten Verwendung der Zahlwörter im Alter von etwa viereinhalb Jahren. Schwache Kinder verbinden mit der Zahl ‚vier' noch in den ersten Grundschuljahren nur die Vorstellung ‚das vierte Ding'" (Gerster / Schultz 2004: 333).

---

7 So kommt eine Auseinandersetzung mit diesem Thema z. B. in Padberg (1996) und Krauthausen / Scherer (2007) nicht vor. Auch Gaidoschik (2007) behandelt in seinem Vorschlag zur Erarbeitung des Zahlenraums bis 10 dieses Thema nicht.

Der kardinale Zahlbegriff stellt, wie schon angedeutet, den wesentlichen Ausgangspunkt für alle weiteren mathematischen Inhalte der Schuleingangsstufe sowie die weiteren Inhalte des schulischen Mathematikunterrichts dar. Der kardinale Zahlbegriff bedeutet im Wesentlichen, dass Mengen eine bestimmte Anzahl an Elementen haben, sich also aus Teilmengen der Größe Eins zusammensetzen und unter bestimmten Bedingungen miteinander vereinbar sind.[8] Die Anzahl der Elemente wird dabei mit Zahlen benannt, die festhalten, wie viele Elemente eine Menge enthält, wie mächtig sie also ist. Der Mengenbegriff bezeichnet somit die Entwicklung eines Verständnisses für die Aussage Cantors, dass man „unter einer Menge […] die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen“ (Cantor 1895: 481) versteht.

Hierbei sind zwei große Lernbereiche voneinander zu unterscheiden, die wiederum selbst in engem Zusammenhang zueinander stehen und gleichzeitig jeweils untergliedert werden können. Auf der einen Seite stehen die Zählfertigkeiten und das Zahlwissen, und auf der anderen Seite steht der nichtnumerische Mengenbegriff und die Fähigkeit des nichtnumerischen Vergleichens von Mengen. Der kardinale Zahlbegriff ist dann ausreichend entwickelt, wenn sich beide Bereiche im Denken des Kindes vereinigt haben.In diesem Zusammenhang werden vom Kind erste *quantitative Erfahrungen* gemacht, die sich im Wesentlichen im Umfeld dessen abspielen, was Resnick (1992) als protoquantitative Schemata bezeichnet.

Der Bereich des Mengenwissens und der Bereich des kardinalen Zählens stellen einerseits zwei unterscheidbare Bereiche dar, gehören andererseits aber, da es im Wesentlichen um den Umgang mit natürlichen Zahlen einschließlich Null geht, eng zusammen. Der Bereich der Mengen und der protoquantitativen Schemata (vgl. Resnick 1992), also der Erfahrungen im Bereich des Mengenvergleichs nach mehr/weniger, der Mengenveränderungen im Sinne von Vergrößern und Verkleinern sowie Erfahrungen der Aufteilbarkeit kennzeichnet dabei zwei unterschiedliche Schwerpunkte in der Betrachtung von Mengen: im Bereich der

---

8 Diese Bedingung ist dann gegeben, wenn die zu vereinigenden Teilmengen Bestandteil einer gemeinsamen Gesamtmenge sind bzw. sein können; zwei Äpfel und drei Bananen können nur zur Gesamtmenge von fünf Obststücken vereinigt werden. Im Bereich der Schulmathematik zeigt sich bei so genannten Kapitänsaufgaben (vgl. Baruk 1989), dass diese Überlegungen für viele Schülerinnen und Schüler eine Schwierigkeit darstellen.

Mengen geht es um das Zusammenfassen von Elementen zu einer Menge und im Bereich der protoquantitativen Schemata um das Vergleichen, das ‚Zusammengesetztsein' von Mengen sowie die Größenveränderung von Mengen.

Die Entwicklung eines angemessenen kardinalen Zahlbegriffs bedeutet demnach, dass seine mathematischen Teilbereiche im kindlichen Denken zu einer Einheit verschmelzen müssen. Erst auf dieser Basis kann von einem gesicherten kardinalen Zahlbegriff und der Fähigkeit, kardinal mit Zahlen und Operationen umzugehen, ausgegangen werden. Dabei handelt „es sich bei der Verbindung von Zahlwort und Anzahl um einen komplexen Vorgang, bei dem verschiedene Zahlaspekte integriert werden müssen" (Scherer / Moser Opitz 2010: 105).

Innerhalb der mathematikdidaktischen Thematisierung[9] wesentlicher Inhalte des schulischen Anfangsunterrichts wird der Kardinalzahlaspekt oft nur als ein Zahlaspekt unter vielen betrachtet. Bei Padberg (1996) und Krauthausen / Scherer (2007) wird er beispielsweise nicht thematisiert. Demgegenüber ist mit Gaidoschik (2006: 28) festzuhalten, dass der Kardinalzahlaspekt der „Haupt-Gesichtspunkt […] [ist, A.J.], [und dass das, A.J.] Wesentliche der Zahlen [darin besteht, A.J.], dass mit Zahlen die Anzahl von Dingen bestimmt wird, also Antwort gegeben wird auf die Frage ‚Wie viel?'. Und tatsächlich muss ein Kind, um die Grundlagen der Mathematik verstehen und sicher rechnen zu können, zunächst einmal bei den Zahlen bis 10 dieses ‚Wie viel?' verstanden haben."

Der *relationale Zahlbegriff* umfasst die Relation zwischen zwei oder mehr Zahlen und beinhaltet den Vergleich zweier Zahlen oder Mengen in Bezug auf ihre Mächtigkeit, bei dem die Differenz zwischen ihnen festgehalten wird. Diese Erkenntnis hat unter anderem Konsequenzen für den Erwerb der Zählkompetenzen: Die Anzahl der Elemente einer Menge wird mit einer Zahl bezeichnet, und die folgende Zahl bezeichnet eine Menge, die um genau ein Element größer ist. Dabei ist die Eins die Basis der Anzahlbestimmung jeder Menge, und jede Menge ist im Bereich der natürlichen Zahlen ein Vielfaches der Eins. Damit ist der

9 Entsprechendes gilt auch für die curricularen Vorgaben. Die Kultusministerkonferenz (2004), das Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2008) und der Lehrplan des Bundeslandes Saarland (Ministerium für Bildung, Familie, Frauen und Kultur 2009) behandeln den kardinalen Zahlbegriff als übergeordnetes Lernziel beispielsweise nicht. In den Lehrplänen der Bundesländer Niedersachsen (Niedersächsisches Kultusministerium 2006) sowie im gemeinsamen Lehrplan der Bundesländer Berlin, Brandenburg, Bremen und Mecklenburg-Vorpommern wird der Kardinalzahlbegriff ebenfalls nicht als Besonderheit erwähnt, sondern unter Zahlaspekte subsumiert, die gleichberechtigt neben – beispielsweise – der Addition im Zahlenraum bis 10 stehen.

Unterschied zwischen zwei Zahlen genau bestimmbar, und dies ermöglicht den exakten quantitativen Vergleich zweier Mengen. Damit wird auch das additive oder subtraktive Lösen von Aufgaben sinnvoll möglich.

Die Entwicklung eines umfassenden Zahlbegriffs bedeutet demnach die Verschmelzung der genannten Zahlbegriffe, d.h. die Integration von Mengen- und Zahlenwissen zu einem Gesamtverständnis. Am Ende der Schuleingangsstufe sollten Kinder somit zumindest die genannten Bereiche eines Zahlverständnisses entwickelt und integriert haben. Ist dies nicht gelungen, haben sie die stofflichen Hürden des Zahlbegriffserwerbs also nicht überwunden, liegen grundlegende Schwierigkeiten im basalen mathematischen Bereich vor, und ein weiterführender Unterricht kann nicht an begrifflich verstandene Inhalte anknüpfen. Kompensationsbemühungen wie z. B. zählendes Rechnen oder formalisierte Lösungswege, deren Sinn nicht verstanden wurde, können die Folge sein und stellen eine kindliche Form des Umgangs mit nicht bewältigbaren Anforderungen dar.

2.2 Zählen und kardinales Zählen

Neben dem nichtnumerischen Mengenbegriff ist die numerische Benennung der Quantitäten der zweite wesentliche Bereich, um ausreichende mathematische Grundlagen für das angemessene mathematische Operieren mit natürlichen Zahlen einschließlich Null zu erlangen. Der wesentliche Inhalt des Zählens ist die Möglichkeit, die Mächtigkeit einer Menge adäquat zu bestimmen. Zählen als eine grundlegende Möglichkeit, die Mächtigkeit einer Menge zu bestimmen, wird von vielen Kindern – aber auch Erwachsenen – für informelle arithmetische Operationen benutzt (vgl. Ginsburg 1989: 57-78.).

Um mithilfe des Zählens die Anzahl einer Menge bestimmen zu können, sind in verschiedenen Bereichen Kenntnisse und Fertigkeiten notwendig. Diese zu entwickeln kann auf verschiedenen Ebenen zu unterschiedlichen Zeiten und mit differierenden Kompetenzen stattfinden. Um durch Zählen die richtige Anzahl bestimmen zu können, sind mehrere Prinzipien zu beachten. Die Kenntnis dieser Prinzipien und die Fähigkeiten des Zählens müssen nicht miteinander korrespondieren, müssen jedoch im Laufe der Entwicklung miteinander zu einem Zählwissen verschmelzen, um den schulischen Anforderungen gewachsen zu sein. Die fünf Zählprinzipien sind dabei

- das Eindeutigkeitsprinzip,

- das Prinzip der stabilen Ordnung,
- das Kardinalzahlprinzip,
- das Abstraktionsprinzip und
- das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung.

Das *Eindeutigkeitsprinzip* bedeutet, dass jedem zu zählenden Objekt ein Zahlwort zugeordnet wird. Es wird somit eine Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen Zahlwort und zu zählendem Objekt vorgenommen. Das *Prinzip der stabilen Ordnung* besagt, dass die Zahlnamen eine feststehende, stabile Ordnung haben, sie also in der richtigen Reihenfolge zu benennen sind. Das *Kardinalzahlprinzip* bedeutet, dass jedes benannte Zahlwort die Mächtigkeit der bisher gezählten Menge angibt. Eine Schwierigkeit besteht darin, dass der Zählprozess eine Verbindung des Eindeutigkeitsprinzips und des Kardinalzahlprinzips darstellt. Damit wird jedes Element gezählt und erhält einen Zahlnahmen, der sowohl den Platz in der Zahlwortreihe als auch die Anzahl der insgesamt gezählten Elemente angibt. Das *Abstraktionsprinzip* bedeutet, dass die Zählprinzipien 1 bis 3 nicht einmalig für eine spezifische Menge gelten, sondern universalen Charakter haben, also auf jede beliebige Menge angewandt werden können. Das Prinzip der *Irrelevanz der Anordnung* bedeutet, dass die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte für die Mächtigkeit der Menge, das Zählergebnis, gleichgültig ist.

Hinzu tritt die Entwicklung der Fertigkeiten bei der *Nutzung der Zahlwortreihe*. Kinder sind mit Zahlen – geschriebenen wie gesprochenen – in ihrem Alltag konfrontiert. Sie können Zahlen auf Preisen, als Hausnummer etc. lesen und hören sie im Alltag als Telefonnummer, als ihr Alter („Du bist *drei* Jahre alt“), in Geschichten (Die *sieben* Zwerge etc.), bei der Interpretation von Bilderbüchern („Schau, da sind *zwei* Pferde“) oder wenn Erwachsene zählen. Weil sie Zahlen im Alltag hören – die offenbar eine wichtige Rolle spielen – versuchen Kinder, die Zahlen zu lernen. Im Alter von ca. 3 Jahren beginnen sie damit, die Zahlwortreihe als geordnete Sequenz zu lernen (vgl. Fuson 1988 und Fuson et al. 1982). Die Entwicklung der Aneignung der Zählfertigkeiten verläuft dabei in der Regel als Abfolge von mehreren Stufen (vgl. auch Scherer / Moser Opitz 2010: 105-107), an deren Ende eine entwickelte Fertigkeit des Zählens steht. Das Erlernen der Abfolge der Zahlwortreihe „is essentially a serial recall task: The word in the sequence must be recalled and they must be produced in the correct order. […] The acquisition of the sequence from twenty to one hundred is also a serial recall task, but one of a list with a repeating pattern” (Fuson et al. 1982: 34).

Die Entwicklung einer umfassenden und damit auch angemessenen Fertigkeit des Zählens umfasst demnach eine Integration der fünf Zählprinzipien sowie der Nutzung der Zahlwortreihe. Als Konsequenz für die Diagnostik der Zählfertigkeiten kann gefolgert werden, dass diese das Können des Kindes bezüglich des Benennens der Zahlwortreihe und der fünf Zählprinzipien erfassen muss.

2.3 Das Stellenwertsystem

Im Alltagsgebrauch gehen die meisten Menschen mit dem sogenannten dekadischen oder dezimalen Stellenwertsystem automatisiert um, auch wenn die Prinzipien, nach denen das dekadische Stellenwertsystem funktioniert, nicht unbedingt verstanden sind. Für den alltäglichen Umgang mit den natürlichen Zahlen ist dies prinzipiell ausreichend, denn der praktische Umgang mit dem dekadischen Stellenwertsystem gelingt auch dann, wenn seine Funktionsweise unbekannt ist. Eine Auseinandersetzung mit den grundlegenden Funktionen eines Stellenwertsystems überhaupt und dem dekadischen Stellenwertsystem im Besonderen ist allerdings notwendig, um sich die Schwierigkeiten und Stolpersteine beim Erwerb dieses mathematischen Inhaltes vor Augen zu führen.

Gelingt der Erwerb wesentlicher Funktionsweisen und Konstruktionsprinzipien des Stellenwertsystems nicht, wird sowohl der Umgang mit mehrstelligen Zahlen als auch das Rechnen und das Ausnutzen von Rechenvorteilen deutlich erschwert, wenn nicht gar verunmöglicht. Beim Stellenwertsystem handelt es sich um ein „abstraktes mathematisches Symbolsystem […], das in seiner Eleganz und Effizienz von den Kulturvölkern erst nach jahrtausendelangem Suchen und Probieren gefunden worden ist“ (Padberg 2005: 55). Es ist sowohl Grundlage als auch wesentlicher Bestandteil arithmetischer Basiskompetenzen, denn „neither number sense nor computational understanding can possibly be developed without a firm understanding of place value“ (van de Walle 1994: 154). Hierbei sind inhaltlich fünf besondere Bereiche zu beachten:

- das Prinzip der Bündelung und die Größe des jeweiligen Bündels,
- das Prinzip des Stellenwerts,
- das additive Prinzip des Stellenwertsystems,
- das multiplikative Prinzip des Stellenwertsystems,
- die sprachliche Benennung mehrstelliger Zahlen und dessen Regelhaftigkeit.

Das *erste Prinzip* der Bündelung unter besonderer Beachtung der Größe des jeweiligen Bündels bedeutet, dass Mengen gleicher Mächtigkeit mit einem Zeichen versehen werden, das die jeweilige Mächtigkeit angibt. Dies gilt prinzipiell auch für einstellige Zahlen, bei denen die jeweilige Zahl angibt, wie viele Elemente eine Menge enthält. Das Kennzeichnen der Mächtigkeit einer Menge durch ein Zeichen hält die Anzahl allgemein fest. Damit steigt die Abstraktionsstufe, auf der Kinder die Ziffern 0 bis 9 betrachten müssen. Waren diese zunächst dafür da, die Anzahl von Elementen einer Menge, die Mächtigkeit einer Menge zu bestimmen, so müssen die Kinder nun verstehen, dass die Ziffern je nach Position im Stellenwertsystem – *zweites Prinzip* – unterschiedliche Mächtigkeiten repräsentieren: auf der einen Stelle Einer, auf der anderen Stelle Zehner. Die Mächtigkeit der Ziffer 2 in der Zahl 22 hängt davon ab, an welcher Stelle sie steht. Steht sie links, bezeichnet sie zwei Zehner und damit eine Menge mit 20 Elementen, die zu Einheiten mit jeweils 10 Elementen zusammengefasst sind. Steht sie rechts, bezeichnet sie zwei Einer und damit eine Menge mit zwei Elementen. Die Bündelung auf der Basis 10 und der Stellenwert, d.h. die Repräsentation verschiedener Einheiten (Einer, Zehner etc.) mit den Ziffern von 0 bis 9 entsprechend der Stelle, auf der sie sich befinden, stellt ein Grundprinzip des Stellenwertsystems dar. Da dies immer wieder stattfinden kann, also auch Bündel auf der Basis 10 wiederum zu nächstgrößeren Einheiten zusammengefasst werden, kann man von fortgesetzter Bündelung sprechen (vgl. auch Krauthausen / Scherer 2007: 15).

Das additive Prinzip (*Prinzip drei*), nach dem sich mehrstellige Zahlen aus der Summe verschiedener Einheiten zusammensetzen, bezeichnet das Teil-Teil-Ganze-Verständnis insbesondere in der Hinsicht, dass mehrstellige Zahlen aus zwei oder mehr verschiedenen Einheiten (Einer, Zehner, Hunderter...) gebildet werden: „Understanding place value requires an elaboration of the student‘s emerging understanding of a part-whole concept“ (Ross 1989: 47). Es ist dabei so (vgl. Floer 1990: 97), dass das Verständnis mehrstelliger Zahlen nicht zunächst prinzipiell entwickelt werden muss und dann nur noch auf erweiterte Zahlenräume zu übertragen ist, sondern die Erweiterung des Zahlenraums bedeutet immer auch, dass der jeweilige Abschnitt des Stellenwertsystems, basierend auf bisher Verstandenem, neu aufgebaut werden muss. Wenn ein Kind, um es an einem Beispiel darzustellen, im Zahlenraum bis 99 das dekadische Stellenwertsystem verstanden hat, ist darin nicht automatisch eingeschlossen, dass der Zahlenraum bis 999 oder aber im Bereich 0,1 etc. verstanden wurde, auch wenn dies ‚nur‘ Anwendungsfälle des dekadischen Stellenwertsystems sind. Eine besondere Schwierigkeit im Verständnis stellt hierbei die Null dar, die angibt, dass es keine Elemente einer bestimmten Bündelung gibt, dass also beispielsweise die Zahl 307 drei Hunderter, null Zehner und sieben Einer enthält.

Das vierte *Prinzip des multiplikativen Verständnisses* – dies wird hier nur angedeutet – bedeutet, dass die jeweilige Ziffer angibt, wie oft Elemente der spezifischen Bündelungseinheit vorhanden sind. Demnach besteht, um wieder das Beispiel der Zahl 307 anzuführen, diese aus 3 x Hundertern, 0 x Zehnern und 7 x Einern.

Die *sprachliche Darstellung mehrstelliger Zahlen* tritt zur inhaltlichen Erfassung hinzu und kann sie gegebenenfalls erleichtern oder erschweren (vgl. z. B. Dehaene 1999: 120). Die deutsche Sprache weist einige Besonderheiten auf, die es nicht unbedingt erleichtern, das Stellenwertsystem und seine Schreibweise angemessen zu erfassen. Während im Zahlenraum bis 9 die Zahlen und ihre Zeichen auswendig zu wissen sind (vgl. z. B. Fuson et al. 1982: 34) und die Zahl 10 die erste inhaltliche Hürde darstellt, da erstmalig eine Zahl zweistellig geschrieben wird, stellen die Zahlen 11 und 12 sprachlich als Elf und Zwölf Besonderheiten[10] dar, die weder davor noch danach wieder auftauchen. Die Zahlen 13 bis 19 wiederum werden im Deutschen in direkter Verbindung des Zahlworts der Einer mit dem Zahlwort 10 gebildet, also als Drei-zehn gesprochen. Hier schließt sich wiederum eine Unregelmäßigkeit an, da die Zahl 20 als Zwan-zig gesprochen wird. Die Zahlworte für Zehner im Zahlenraum bis einschließlich 90 variieren Regel- und Unregelmäßigkeit: *Drei*ßig, *Vier*zig, *Fünf*zig, *Acht*zig und *Neun*zig sind regelmäßig, wohingegen die Zahlworte *sech*zig und *sieb*zig unregelmäßig sind. Eine Ausnahme ist 30, weil hier die Nachsilbe nicht -zig, sondern -ßig ist. Durch die Art der deutschen Sprache, zunächst die Anzahl der Einer und anschließend die Anzahl der Zehner zu nennen, ergeben sich für einige Kinder Schwierigkeiten, die so, dies zeigen Untersuchungen zum Lernen der Zahlwortreihe in verschiedenen Sprachen (vgl. z. B. Uy 2003, Miller et al. 1995), nicht notwendig zu sein scheinen.

Am Ende der Schuleingangsstufe wird von Kindern im Schulunterricht der flexible und sichere Umgang mit dem dekadischen Stellenwertsystem in Form von zweistelligen Zahlen gefordert; auf diesen Fertigkeiten baut in der dritten und vierten Klasse die Erweiterung des Zahlenraums, zunächst bis 1.000 und dann bis mindestens 1.000.000, auf. Gleichzeitig ist der sichere Umgang mit dem dekadischen Stellenwertsystem Bestandteil der angemessenen Rechenoperati-

10 Vgl. auch Gerster / Schultz (2004: 327) zum etymologischen Hintergrund dieser normabweichenden Worte.

onen mit zweistelligen Zahlen. Bezogen auf das dekadische Stellenwertsystem bedeutet dies, dass Kinder am Ende der Schuleingangsstufe in mindestens drei Bereichen ausreichende Fertigkeiten entwickelt haben müssen. Dies sind

- das Prinzip der Bündelung auf der Basis 10,
- das Prinzip des Stellenwerts und
- die sprachliche Ausdrucksweise des Stellenwertsystems.

Als Konsequenz für die Diagnostik des kindlichen Verständnisses des dekadischen Stellenwertsystems kann dementsprechend gefolgert werden, dass diese das Können des Kindes bezüglich der drei genannten Bereiche erfassen muss.

2.4 Die Addition

Die Addition stellt in der Schuleingangsstufe einen wesentlichen Bereich des arithmetischen Inhalts des Mathematikunterrichts dar. Sie nimmt dementsprechend einen großen Raum ein, auch wenn schon lange vor Beginn des Schulbesuchs erste Additions- und Subtraktionsstrategien entwickelt werden (vgl. z. B. Spiegel 1992, Ginsburg 1989: 57-78). Dabei sind mehrere Verständnisebenen differenzierbar, damit von einem angemessenen Aneignungsprozess gesprochen werden kann:

- Operationsverständnis im Sinne von Gerster und Schultz (2004)
- Gleichungsverständnis
- adäquate Lösungsstrategien

Auf der Ebene des *Operationsverständnisses* bedeutet dies, dass ein Kind zwischen konkreter Sachsituation, Modell und symbolischer Darstellung von Additionen (oder Subtraktionen) sicher wechseln kann. Dies ist durch Gerster und Schultz (2004: 352) grafisch am Beispiel der Subtraktion wie folgt dargestellt worden:

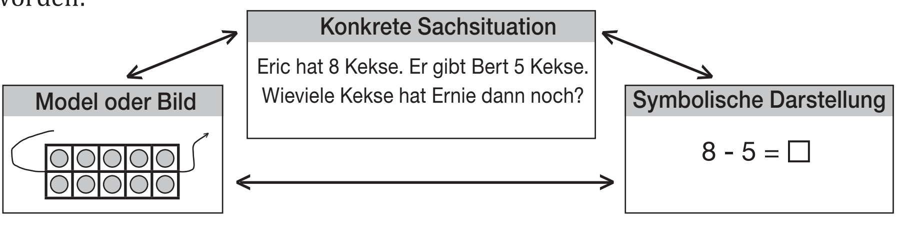

Abbildung 1: Zusammenhang operativer Ebenen der Addition und Subtraktion nach Gerster und Schultz (Abb. aus: Gerster / Schultz 2004: 352).

Die Transformation von einer Ebene in die andere Ebene stellt für Kinder eine besondere Herausforderung dar. Die Addition zweier natürlicher Zahlen kann als Vereinigung zweier disjunkter Mengen zu einer Gesamtmenge verstanden werden. Dabei gilt auf der Zahlenebene das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz, welche jedoch auf der Mengenebene nicht zulässig sind. Demnach ist eine Abstraktion von der konkreten Dinglichkeit der Mengenebene notwendig, um ein adäquates Additionsverständnis zu entwickeln.

Hinzu tritt ein *Gleichungsverständnis*, das die Gleichungsform der Addition in ihren Besonderheiten erfasst hat. Dargestellt werden die Addition und Subtraktion in Gleichungen, bei denen das Zeichen „–“ das Zeichen der Subtraktion, das Zeichen „+“ das der Addition ist und das Zeichen „=“ bedeutet, dass beide Seiten gleich mächtig sind. Für die Schuleingangsstufe ist – vom Ende der Schuleingangsstufe her gedacht – die sichere und flexible Addition zweistelliger Zahlen mit Zehnerübergang als anzustrebendes Ziel zu betrachten. Dementsprechend sollen alle Kinder am Ende der Schuleingangsstufe Aufgaben wie 37 + 46 = ___ lösen können. Dabei ist bei Aufgaben der Form a + b = c jeweils a, b und c zu ermitteln. Hier ist unterstellt, dass Kinder ein Verständnis der Addition als Vereinigung zweier Teilmengen zu einer Gesamtmenge entwickelt haben, dass sie die Bedeutung des Rechenzeichens „+“ kennen und dass ihnen die Bedeutung des Vergleichszeichens der Gleichheit „=“ bekannt ist.

Adäquate Lösungsstrategien verbinden das Operations- und Gleichungsverständnis, integrieren am Ende der Schuleingangsstufe nichtzählende Lösungsstrategien wie Faktenabruf und Ableitungsstrategien zu einem angemessenen Vorgehen beim Lösen von Additionsaufgaben und verbinden dies mit der Fertigkeit, eine Beziehung zwischen Aufgabe, konkreter Sachsituation und modellhafter Darstellung herzustellen. Dabei müssen Kinder in verschiedenen Bereichen Fertigkeiten entwickeln, um diesem Ziel gewachsen zu sein. Im Zahlenraum bis 10 umfasst dies folgende Fertigkeiten:

- Entwicklung eines kardinalen und relationalen Zahlbegriffs unter besonderer Berücksichtigung des Teil-Teil-Ganze-Schemas,
- Automatisierung der Zahlzerlegungen aller Zahlen im Zahlenraum bis 10,
- Erkenntnis der Bedeutung der Addition und Subtraktion,
- Erkenntnis der Regeln der Notationssysteme der Addition und Subtraktion.

Im Zahlenraum bis 100 kommt als Erweiterung im Wesentlichen ein Kompetenzbereich hinzu: die Kenntnis der Bedeutung des dekadischen Stellenwertsystems in der Addition und Subtraktion mehrstelliger Zahlen und der Besonderheiten der Addition und Subtraktion mehrstelliger Zahlen.

Als Konsequenz für die Diagnostik der mathematischen Fertigkeiten im Zahlenraum bis 10 kann demnach festgehalten werden, dass das Operationsverständnis im Sinne Gerster und Schultz, das Gleichungsverständnis und mit ihm einhergehend der flexible Umgang mit unterschiedlichen Notationsformen von Gleichungen sowie die Lösungsstrategien erfasst werden sollten.